

Modellierungsmethoden und Stabilitätsanalyse von selbststeuernden Produktionsnetzwerken

Sergey Dashkovskiy¹, Michael Görge², Michael Kosmykov¹,
Andrii Mironchenko¹, Lars Naujok¹

¹Zentrum für Technomathematik (ZeTeM), Universität Bremen.



² Planung und Steuerung produktionstechnischer Systeme (PSPS),
BIBA - Bremer Institut für Produktion und Logistik GmbH an der
Universität Bremen.



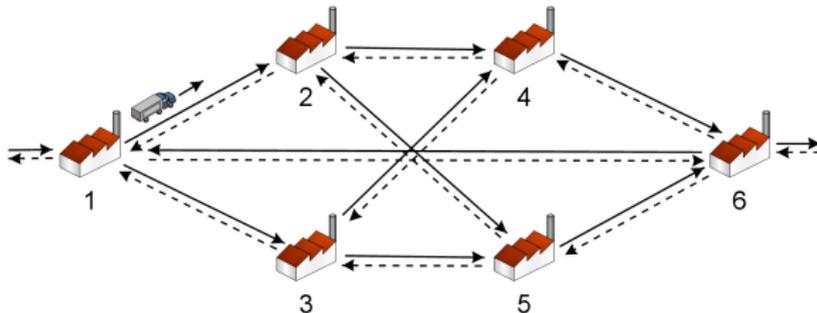
10. November 2009



Inhalt

- 1 Einführung
- 2 „Time-delay systems“
- 3 Hybride Systeme
 - „Impulsive systems“
- 4 Stabilitätsanalyse
- 5 Zusammenfassung und Ausblick

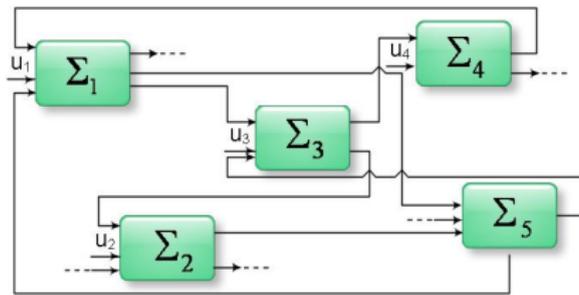
Einführung - Produktionsnetzwerke



Ziele:

- Mathematische Beschreibung (Modellierung) eines Produktionsnetzwerkes
- Modellierung/Implementierung von Selbststeuerungsmethoden
- (Stabilitäts-) Analyse von selbststeuernden Produktionsnetzwerken

Einführung - Mathematische Modellierung

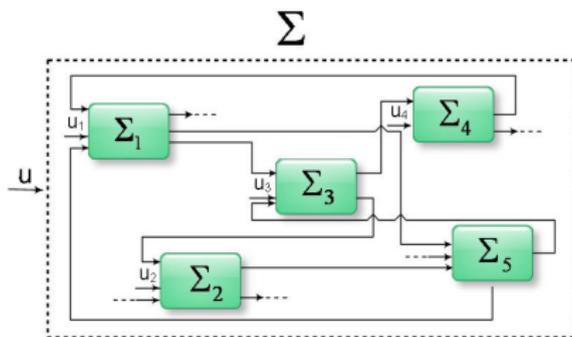


Beschreibung durch gewöhnliche Differentialgleichungen (grob gesagt):

Zeitliche Änderung des Systems

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), u_i(t)) = \sum \text{Zufluss} - \sum \text{Abfluss}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Einführung - Mathematische Modellierung



Zeitliche Änderung des Gesamtsystems:

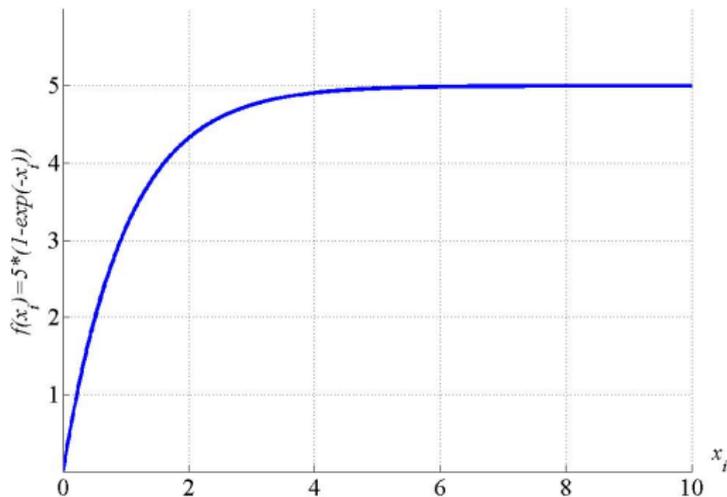
$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_n) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1)$$

Einführung - Selbststeuerung

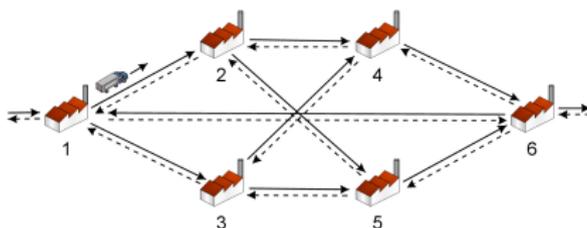
Selbstanpassende Produktionsrate:

$$\tilde{f}_i(x_i(t)) := \alpha_i (1 - \exp(-x_i(t))), \quad i = 1, \dots, 6,$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ konstant ist.



Modellierung



$$\dot{x}_1(t) = u(t) + \frac{1}{10000} \tilde{f}_6(x_6(t)) - \tilde{f}_1(x_1(t)),$$

$$\dot{x}_2(t) = b_{12} \tilde{f}_1(x_1(t)) - \tilde{f}_2(x_2(t)),$$

$$\dot{x}_3(t) = b_{13} \tilde{f}_1(x_1(t)) - \tilde{f}_3(x_3(t)),$$

$$\dot{x}_4(t) = b_{24} \tilde{f}_2(x_2(t)) + b_{34} \tilde{f}_3(x_3(t)) - \tilde{f}_4(x_4(t)),$$

$$\dot{x}_5(t) = b_{25} \tilde{f}_2(x_2(t)) + b_{35} \tilde{f}_3(x_3(t)) - \tilde{f}_5(x_5(t)),$$

$$\dot{x}_6(t) = \tilde{f}_4(x_4(t)) + \tilde{f}_5(x_5(t)) - \tilde{f}_6(x_6(t)),$$

$$\sum_j b_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Modellierung

Modellierung ohne Transportzeiten, mit Warteschlangenmethode:

$$b_{12}(t) := \frac{\frac{\alpha_2}{x_2(t)}}{\frac{\alpha_2}{x_2(t)} + \frac{\alpha_3}{x_3(t)}}$$

andere analog.

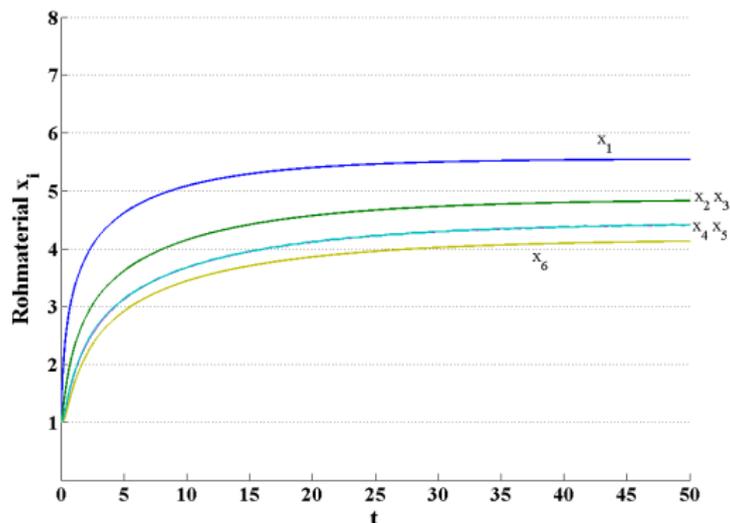
Zusammenfassung dieses Modellierungsansatzes:

- Beschreibung durch ODE's (kontinuierlich)
- Selbststeuerung der Fabriken
- Implementierung Warteschlangenmethode
- Keine Berücksichtigung von Transportwegen/-zeiten
- Beliebig veränderbar/erweiterbar

Simulation

Wählen wir $u \equiv 25$, $x_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ und

$\alpha_1 = 25.1$, $\alpha_2 = 12.6$, $\alpha_3 = 12.6$, $\alpha_4 = 15.2$, $\alpha_5 = 10.1$, $\alpha_6 = 25.4$





„Time-delay systems“

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau), u),$$

„Time-delay systems“

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau), u),$$

Selbstanpassende Produktionsrate:

$$\tilde{f}_i(x_i(t)) := \alpha_i(1 - \exp(-x_i(t))), \quad i = 1, \dots, 6,$$

„Time-delay systems“

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau), u),$$

Selbstanpassende Produktionsrate:

$$\tilde{f}_i(x_i(t)) := \alpha_i(1 - \exp(-x_i(t))), \quad i = 1, \dots, 6,$$

$$\text{QLE: } b_{12}(t) := \frac{\frac{\alpha_2}{x_2(t - \tau_{12})}}{\frac{\alpha_2}{x_2(t - \tau_{12})} + \frac{\alpha_3}{x_3(t - \tau_{12})}}$$

„Time-delay systems“

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau), u),$$

Selbstanpassende Produktionsrate:

$$\tilde{f}_i(x_i(t)) := \alpha_i(1 - \exp(-x_i(t))), \quad i = 1, \dots, 6,$$

$$\text{QLE: } b_{12}(t) := \frac{\frac{\alpha_2}{x_2(t - \tau_{12})}}{\frac{\alpha_2}{x_2(t - \tau_{12})} + \frac{\alpha_3}{x_3(t - \tau_{12})}}$$

$$\dot{x}_1(t) = u(t) + \frac{1}{10000} \tilde{f}_6(x_6(t - \tau_{61})) - \tilde{f}_1(x_1(t)),$$

$$\dot{x}_2(t) = b_{12}(t) \tilde{f}_1(x_1(t - \tau_{12})) - \tilde{f}_2(x_2(t)),$$

$$\dot{x}_3(t) = b_{13}(t) \tilde{f}_1(x_1(t - \tau_{13})) - \tilde{f}_3(x_3(t)),$$

$$\dot{x}_4(t) = b_{24}(t) \tilde{f}_2(x_2(t - \tau_{24})) + b_{34}(t) \tilde{f}_3(x_3(t - \tau_{34})) - \tilde{f}_4(x_4(t)),$$

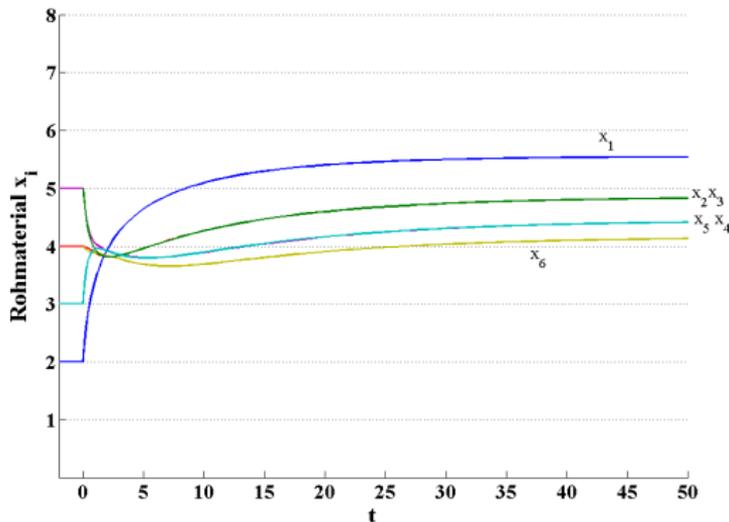
$$\dot{x}_5(t) = b_{25}(t) \tilde{f}_2(x_2(t - \tau_{25})) + b_{35}(t) \tilde{f}_3(x_3(t - \tau_{35})) - \tilde{f}_5(x_5(t)),$$

$$\dot{x}_6(t) = \tilde{f}_4(x_4(t - \tau_{46})) + \tilde{f}_5(x_5(t - \tau_{56})) - \tilde{f}_6(x_6(t)).$$

„Time-delay systems“ - Simulation

Wählen wir $u \equiv 25$, $\tau = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, $\xi \equiv (2, 5, 4, 3, 5, 4)^T$
und

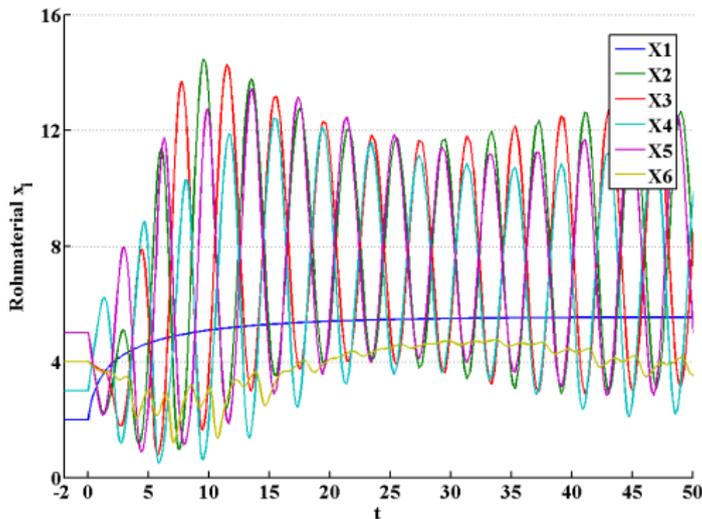
$\alpha_1 = 25.1$, $\alpha_2 = 12.6$, $\alpha_3 = 12.6$, $\alpha_4 = 15.2$, $\alpha_5 = 10.1$, $\alpha_6 = 25.4$



„Time-delay systems“ - Simulation

Wählen wir $u \equiv 25$, $\tau = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$, $\xi \equiv (2, 5, 4, 3, 5, 4)^T$
und

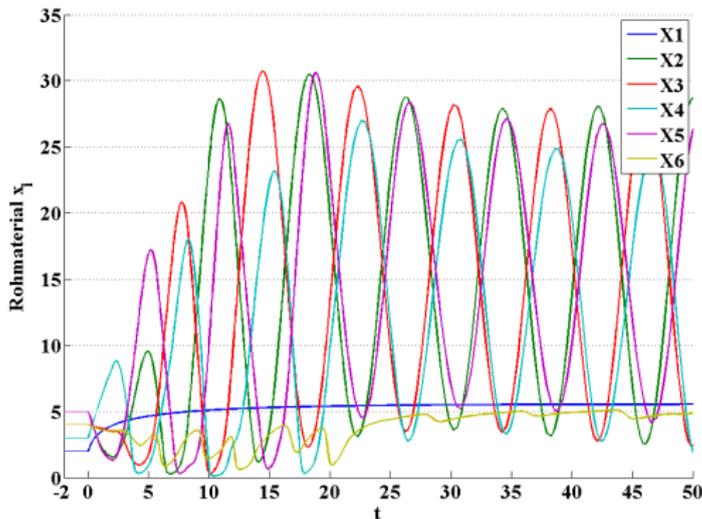
$\alpha_1 = 25.1$, $\alpha_2 = 12.6$, $\alpha_3 = 12.6$, $\alpha_4 = 15.2$, $\alpha_5 = 10.1$, $\alpha_6 = 25.4$



„Time-delay systems“ - Simulation

Wählen wir $u \equiv 25$, $\tau = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)^T$, $\xi \equiv (2, 5, 4, 3, 5, 4)^T$
und

$\alpha_1 = 25.1$, $\alpha_2 = 12.6$, $\alpha_3 = 12.6$, $\alpha_4 = 15.2$, $\alpha_5 = 10.1$, $\alpha_6 = 25.4$



„Time-delay systems“ - Zusammenfassung

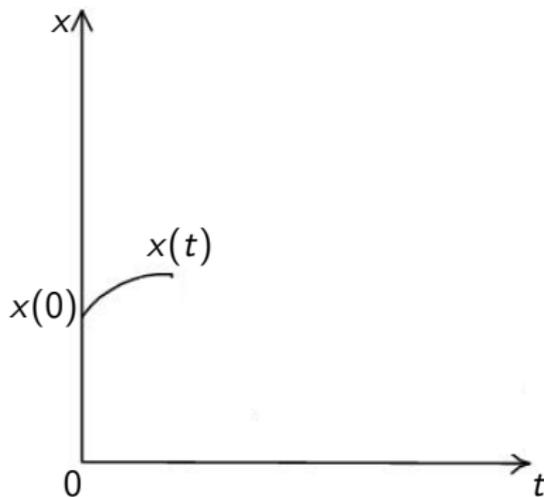
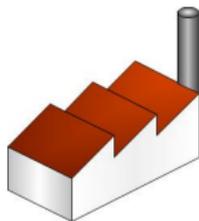
- Modellierung kontinuierlich
- Berücksichtigung von Transportzeiten/-wegen
- Implementierung von Selbststeuerung
- Veränderbar in der Komplexität
- Mathematische Theorie für die Stabilitätsanalyse gekoppelter Systeme (noch nicht) vorhanden

Weiterer Ansatz: Selbstanpassende Produktionsrate:

$$\tilde{f}_i(x_i(t - \tau_i)) := \alpha_i(1 - \exp(-\min_{t-\tau_i \leq s \leq t} |x_i(s)|)), \quad i = 1, \dots, 6,$$

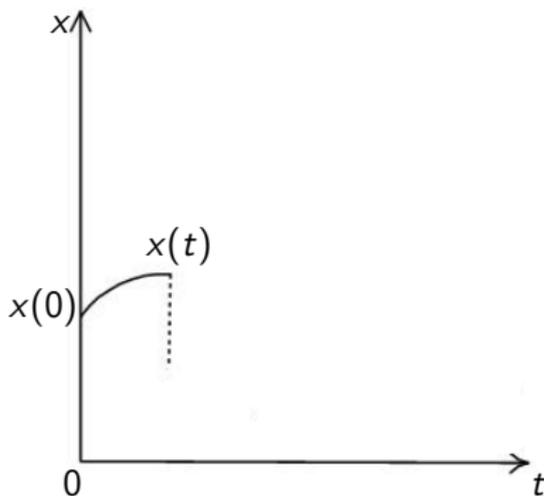
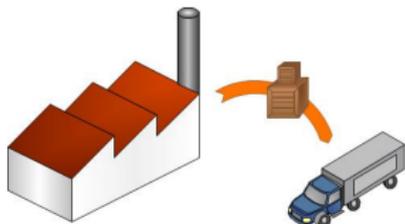
Hybride Systeme - Motivationsbeispiel

Materialfluss in einem Werk ist kontinuierlich.



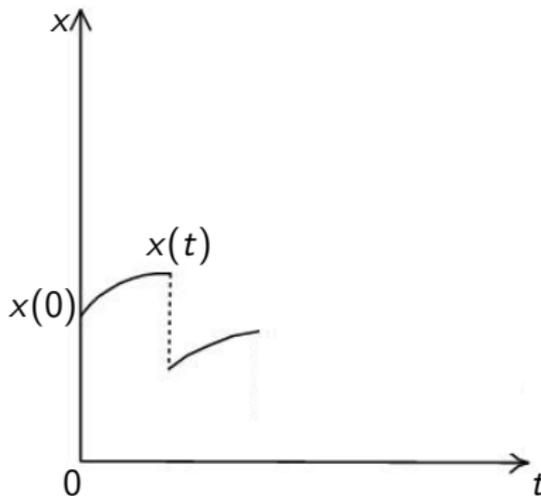
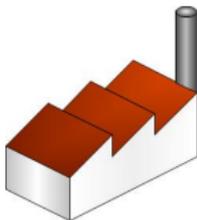
Hybride Systeme - Motivationsbeispiel

Zu einer bestimmten Zeit kommt ein LKW und holt das fertige Material ab. Im Lager passiert einen Sprung.



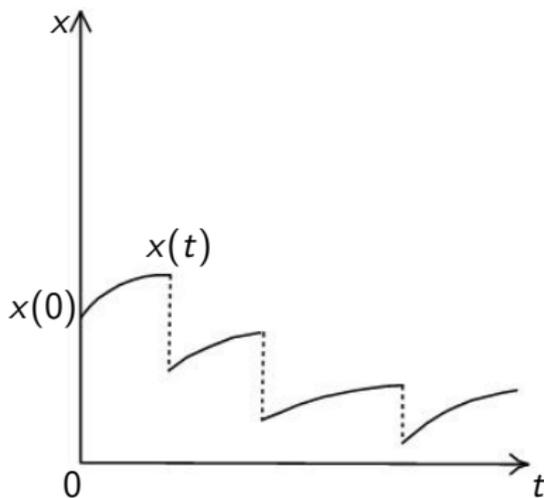
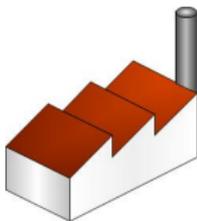
Hybride Systeme - Motivationsbeispiel

Nach dem Sprung ist der Fluss wieder kontinuierlich.

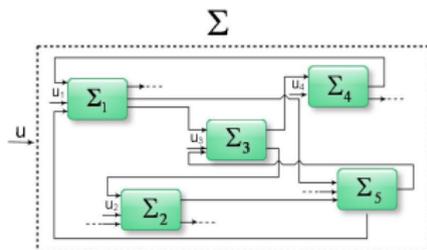


Hybride Systeme - Motivationsbeispiel

Ein hybrides System ist ein dynamisches System, das kontinuierliches und diskontinuierliches (Sprünge) Verhalten vereinigt.



Hybride Systeme

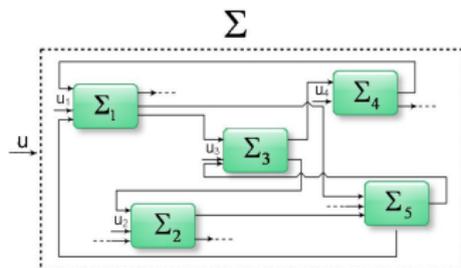


Zeitliche Änderung des Gesamtsystems:

$$\Sigma_i \quad \begin{cases} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_n, u_i) &= \text{Zufluss} - \text{Abfluss}, & (x, u) \in C \\ x_i^+ &= g_i(x_1, \dots, x_n, u_i) &= \text{Sprung}, & (x, u) \in D \end{cases}$$

$$\Sigma \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) &= \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_n) \end{pmatrix}, & (x, u) \in C \\ x^+ = g(x, u) &= \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n, u_1) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n, u_n) \end{pmatrix}, & (x, u) \in D \end{cases}$$

„Impulsive systems“

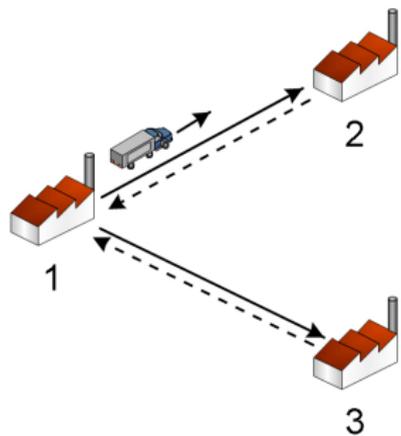


$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, u) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_n) \end{pmatrix}, \quad t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \\ x = g(x^-, u) = \begin{pmatrix} g_1(x_1^-, \dots, x_n^-, u_1) \\ \vdots \\ g_n(x_1^-, \dots, x_n^-, u_n) \end{pmatrix}, \quad t = t_k, k \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

$\{t_1, t_2, t_3, \dots\}$ ist eine monoton steigende Folge von Sprungzeiten in (t_0, ∞) .

„Impulsive systems“ - Modellierung

- Eingangswarenlager x_i und Ausgangswarenlager y_i
- Warteschlangenmethode
Die Waren werden zu dem Standort geliefert, in denen das Eingangslager geringer ist.



Die Kapazität vom LKW ist 40.

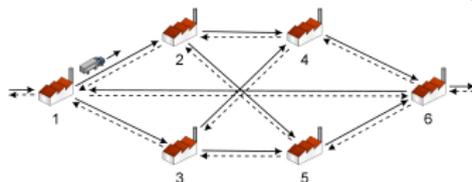
$$\begin{cases} x_2(t) = x_2^-(t) + \min\{y_1^-(t-2), 40\}, \\ x_3(t) = x_3^-(t), \end{cases}$$

$$t = t_k, \quad x_2^-(t-2) \leq x_3^-(t-2),$$

$$\begin{cases} x_2(t) = x_2^-(t), \\ x_3(t) = x_3^-(t) + \min\{y_1^-(t-2), 40\}, \end{cases}$$

$$t = t_k, \quad x_2^-(t-2) > x_3^-(t-2).$$

„Impulsive systems“ - Modellierung



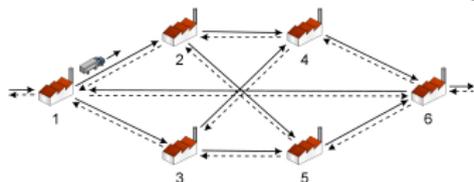
■ Kontinuierliche Dynamik:

$$\dot{x}_1 = -\tilde{f}_1(x_1) + u,$$

$$\dot{x}_i = -\tilde{f}_i(x_i), \quad i = 2, \dots, 6, \quad t \neq 4k, 4k + 2$$

$$\dot{y}_i = \tilde{f}_i(x_i), \quad i = 1, \dots, 6.$$

„Impulsive systems“ - Modellierung



- Kontinuierliche Dynamik:

$$\dot{x}_1 = -\tilde{f}_1(x_1) + u,$$

$$\dot{x}_i = -\tilde{f}_i(x_i), \quad i = 2, \dots, 6, \quad t \neq 4k, 4k + 2$$

$$\dot{y}_i = \tilde{f}_i(x_i), \quad i = 1, \dots, 6.$$

- Sprünge (Diskontinuierliche Dynamik):

$$y_i(\bar{t}) = y_i^-(\bar{t}) - \min\{y_i^-(\bar{t}), 40\},$$

$$t = 4k + 2 :$$

$$\bar{t} = 4k, \quad i = 1, \dots, 6,$$

$$x_2(t) = x_2^-(t) + \min\{y_1^-(\bar{t}), 40\},$$

$$x_2^-(\bar{t}) \leq x_3^-(\bar{t}),$$

$$x_3(t) = x_3^-(t) + \min\{y_1^-(\bar{t}), 40\},$$

$$x_2^-(\bar{t}) > x_3^-(\bar{t}),$$

$$x_4(t) = x_4^-(t) + \min\{y_2^-(\bar{t}), 40\} + \min\{y_3^-(\bar{t}), 40\},$$

$$x_4^-(\bar{t}) \leq x_5^-(\bar{t}),$$

$$x_5(t) = x_5^-(t) + \min\{y_2^-(\bar{t}), 40\} + \min\{y_3^-(\bar{t}), 40\},$$

$$x_4^-(\bar{t}) > x_5^-(\bar{t}),$$

$$x_6(t) = x_6^-(t) + \min\{y_4^-(\bar{t}), 40\} + \min\{y_5^-(\bar{t}), 40\},$$

$$x_1(t) = x_1^-(t) + \min\{y_6^-(\bar{t}), 40\},$$

„Impulsive systems“ - Simulation

Wir wählen als Eingang $u = 10(\sin(t) + 1)$,

Anfangswerte $x_i^0 = 10, y_i^0 = 10, i = 1, \dots, 6$

und als maximale Produktionsraten:

$$\alpha_1 = 11,$$

$$\alpha_2 = 7,$$

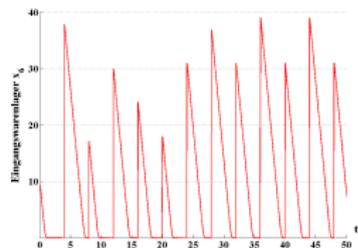
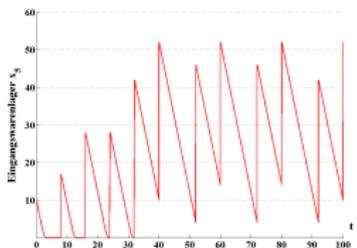
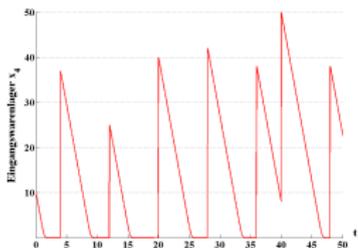
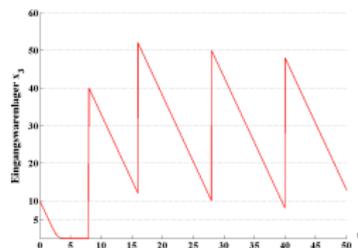
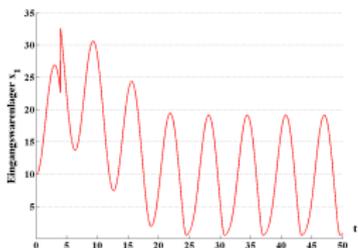
$$\alpha_3 = 3.5,$$

$$\alpha_4 = 7.5,$$

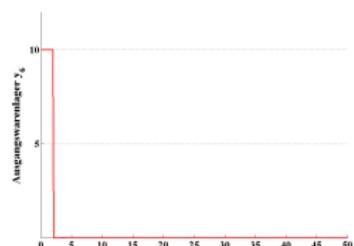
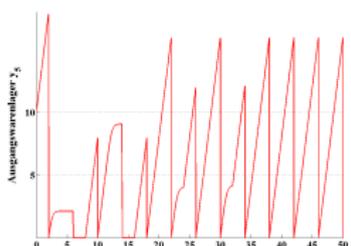
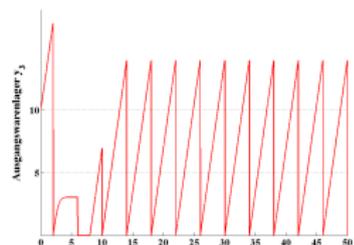
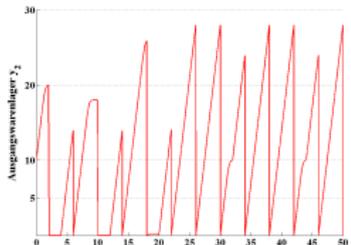
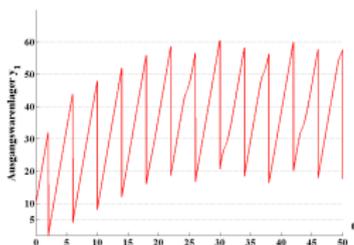
$$\alpha_5 = 4,$$

$$\alpha_6 = 11.6.$$

Simulation - Eingangszustände



Simulation - Ausgangszustände



Hybride Systeme - Zusammenfassung

- Implementierung von Selbststeuerung
- Berücksichtigung von Sprüngen in den Zuständen
- Berücksichtigung der (verschiedenen) Transportzeiten
- Berücksichtigung verschiedener Sprungbedingungen
- Mathematische Theorie für die Stabilitätsanalyse gekoppelter Systeme (noch nicht) vorhanden

Stabilitätsanalyse

Instabilität verursacht negatives Verhalten, zum Beispiel

- hohe Lagerkosten
- große Anzahl von unerfüllten Aufträgen
- Verlust von Kunden

Stabilitätsanalyse:

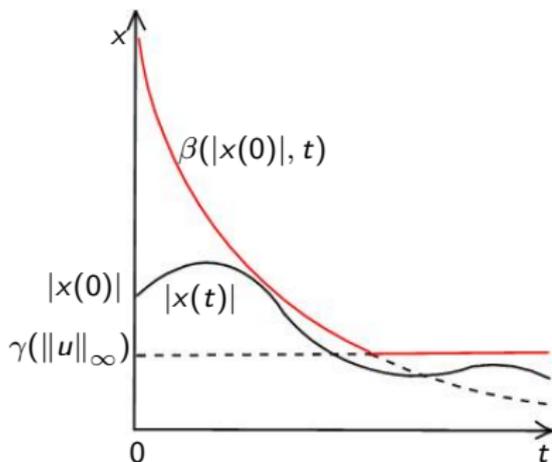
- Werkzeug: Lyapunov-Funktionen
- Rückschluss auf das Systemverhalten
- Herleitung von Parametern, um Stabilität mathematisch zu garantieren

Stabilitätsanalyse - ISS

Definition

Wir nennen das System (1) „input-to-state“ stabil (ISS), falls $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ und $\beta \in \mathcal{KL}$ existieren, so dass für alle Anfangswerte x_0 und alle Eingänge $u(t)$ gilt:

$$\|x(t, x_0, u)\| \leq \max \{ \beta(\|x_0\|, t), \gamma(\|u\|_\infty) \}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$



Stabilitätsanalyse - Lyapunov Funktionen

Definition

Eine lokal Lipschitzstetige Funktion $V_i : \mathbb{R}^{N_i} \rightarrow \mathbb{R}_+$ wird *ISS Lyapunov Funktion des i -ten Teilsystems von (1)* genannt, falls V_i folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1.) Es existieren Funktionen $\psi_{1i}, \psi_{2i} \in \mathcal{K}_\infty$, so dass

$$\psi_{1i}(\|x_i\|) \leq V_i(x_i) \leq \psi_{2i}(\|x_i\|), \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^{N_i}$$

2.) Es existieren Funktionen $\chi_i, \chi_{ij} \in \mathcal{K}_\infty$ und $\mu_i \in \mathcal{P}$, so dass

$$V_i(x_i) \geq \chi_i(\|u_i\|) + \sum_{j=1}^n \chi_{ij}(V_j(x_j))$$

$$\Rightarrow \dot{V}_i(x_i) = \nabla V_i(x_i) \cdot f_i(x_1, \dots, x_n, u_i) \leq -\mu_i(V_i(x_i)), \quad \text{fast überall}$$

für alle $x_i \in \mathbb{R}^{N_i}, u_i \in \mathbb{R}^{M_i}$.

Stabilitätsanalyse - Lyapunov Funktionen

$\Gamma := (\chi_{ij})_{i,j=1}^n$, $\chi_{ij} \equiv 0$ definiert einen monotonen Operator durch

$$\Gamma(s) = \left(\sum_{j=1}^n \chi_{1j}(s_j), \dots, \sum_{j=1}^n \chi_{nj}(s_j) \right)^T, \quad s \in \mathbb{R}_+^n.$$

Theorem

Falls jedes Teilsystem von (1) eine ISS Lyapunov-Funktion besitzt und die Bedingung $\Gamma \circ D(s) \not\geq s$, $s \in \mathbb{R}_+^n$, $s \neq 0$, $D := \text{diag}((Id + \nu_i))$, $\nu_i \in \mathcal{K}_\infty$ erfüllt ist, dann ist das Gesamtsystem (1) ISS.

\Rightarrow Bedingungen an die maximalen Produktionsraten

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung:

- Verschiedene Modellierungsansätze
- Modellierung von Transportzeiten
- Implementierung von Selbststeuerung
- Stabilitätsanalysen möglich
- Auswirkung von QLE auf Systemverhalten/Stabilität

Ausblick:

- Berücksichtigung von unterschiedliche Transportzeiten
- Berücksichtigung von Störungen auf Transportwegen
- Berücksichtigung von Maschinenausfällen/Standortausfällen
- Auswirkung auf Stabilität
- Bestimmung der optimalen Ladungskapazität/Anzahl LKW/Fahrintervalle
- Modellreduktion → Auswirkung auf Stabilität

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !

Sergey Dashkovskiy, Michael Görges, Mykhaylo Kosmykov, Andrii Mironchenko und Lars Naujok werden gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Sonderforschungsbereichs SFB 637 „Selbststeuerung logistischer Prozesse - ein Paradigmenwechsel und seine Grenzen“.

